2025年度 東京大学 前期理系 第5問

問題 n を 2 以上の整数とする。1 から n までの数字が書かれた札が各 1 枚ずつ合計 n 枚あり、横一列におかれている。1 以上 $(n-1)$ 以下の整数 i に対して、次の操作 (T_i) を考える。

(T_i) 左から i 番目の札の数字が、左から $(i+1)$ 番目の札の数字よりも大きければ、これら 2 枚の札の位置を入れかえる。そうでなければ、札の位置をかえない。

最初の状態において札の数字は左から $A_1, A_2, \dots, A_n$ であったとする。この状態から $(n-1)$ 回の操作 $(T_1), (T_2), \dots, (T_{n-1})$ を順に行った後、続けて $(n-1)$ 回の操作 $(T_{n-1}), \dots, (T_2), (T_1)$ を順に行ったところ、札の数字は左から $1, 2, \dots, n$ と小さい順に並んだ。以下の問いに答えよ。

- (1) A_1 と A_2 のうち少なくとも一方は 2 以下であることを示せ。
- (2) 最初の状態としてありうる札の数字の並び方 $A_1, A_2, \dots, A_n$ の総数を c_n とする。 n が 4 以上の整数であるとき、 c_n を c_{n-1} と c_{n-2} を用いて表せ。

N_tokyo2025A_05.pbm