

## 2022年度 東京大学 前期理系 第3問

**問題**  $O$  を原点とする座標平面上で考える。座標平面上の2点  $S(x_1, y_1)$ ,  $T(x_2, y_2)$  に対し、点  $S$  が点  $T$  から十分離れているとは、

$$|x_1 - x_2| \geq 1 \text{ または } |y_1 - y_2| \geq 1$$

が成り立つことと定義する。

不等式

$$0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3$$

が表す正方形の領域を  $D$  とし、その2つの頂点  $A(3, 0)$ ,  $B(3, 3)$  を考える。さらに、次の条件 (i), (ii) をともに満たす点  $P$  をとる。

(i) 点  $P$  は領域  $D$  の点であり、かつ、放物線  $y = x^2$  上にある。

(ii) 点  $P$  は、3点  $O$ ,  $A$ ,  $B$  のいずれからも十分離れている。

点  $P$  の  $x$  座標を  $a$  とする。

(1)  $a$  のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 次の条件 (iii), (iv) をともに満たす点  $Q$  が存在しうる範囲の面積  $f(a)$  を求めよ。

(iii) 点  $Q$  は領域  $D$  の点である。

(iv) 点  $Q$  は、4点  $O$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $P$  のいずれからも十分離れている。

(3)  $a$  は (1) で求めた範囲を動くとする。(2) の  $f(a)$  を最小にする  $a$  の値を求めよ。