

2021年度 東京大学 前期理系 第6問

**問題** 定数  $b, c, p, q, r$  に対し,

$$x^4 + bx + c = (x^2 + px + q)(x^2 - px + r)$$

が  $x$  についての恒等式であるとする。

(1)  $p \neq 0$  であるとき,  $q, r$  を  $p, b$  で表せ。

(2)  $p \neq 0$  とする。  $b, c$  が定数  $a$  を用いて

$$b = (a^2 + 1)(a + 2), \quad c = -\left(a + \frac{3}{4}\right)(a^2 + 1)$$

と表されているとき, 有理数を係数とする  $t$  についての整式  $f(t)$  と  $g(t)$  で

$$\{p^2 - (a^2 + 1)\}\{p^4 + f(a)p^2 + g(a)\} = 0$$

を満たすものを1組求めよ。

(3)  $a$  を整数とする。  $x$  の4次式

$$x^4 + (a^2 + 1)(a + 2)x - \left(a + \frac{3}{4}\right)(a^2 + 1)$$

が有理数を係数とする2次式の積に因数分解できるような  $a$  をすべて求めよ。