2014 年度　東京大学　前期理系　第４問

問題　p，q は実数の定数で，$0<p<1$，$q>0$ をみたすとする。関数

$$f(x)=(1-p)x+(1-x)(1-e^{-qx})$$

を考える。

以下の問いに答えよ。必要であれば，不等式 $1+x \leqq e^x$ がすべての実数 x に対して成り立つことを証明なしに用いてよい。

(1)　$0<x<1$ のとき，$0<f(x)<1$ であることを示せ。

(2)　x_0 は $0<x_0<1$ をみたす実数とする。数列 $\{x_n\}$ の各項 x_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を，

$$x_n=f(x_{n-1})$$

によって順次定める。$p>q$ であるとき，

$$\lim_{n\to\infty} x_n=0$$

となることを示せ。

(3)　$p<q$ であるとき，

$$c=f(c),\ 0<c<1$$

をみたす実数 c が存在することを示せ。

N_tokyo2014A_04.pbm