2022 年度　大阪大学　前期理系　第４問

問題　$f(x)=\log(1+x)+1$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　方程式 $f(x)=x$ は，$x>0$ の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ。

(2)　(1) の解を α とする。実数 x が $0<x<\alpha$ を満たすならば，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0<\frac{\alpha-f(x)}{\alpha-x}<f'(x)$$

(3)　数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1=1,\ x_{n+1}=f(x_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める。このとき，すべての自然数 n に対して，

$$\alpha-x_{n+1}<\frac{1}{2}(\alpha-x_n)$$

が成り立つことを示せ。

(4)　(3) の数列 $\{x_n\}$ について，$\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$ を示せ。

N_osaka2022A_04.pbm