2019 年度　大阪大学　前期理系　第 1 問

問題　以下の問いに答えよ。ただし，$\log$ は自然対数，e はその底とする。

(1)　b を実数とする。関数

$$f(x)=\int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt-\frac{x}{x^2+1}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

は単調に減少することを示せ。

(2)　$a \leqq b$ を満たす正の実数 a，b に対し，不等式

$$\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}-\frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}} \leqq \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \leqq e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)$$

が成り立つことを示せ。

(3)　数列 $\{I_n\}$ を次のように定める。

$$I_n=\int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}}\,dt \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log I_n$$

を求めよ。ただし，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(n+1)=0$$

を用いてもよい。

N_osaka2019A_01.pbm