2015 年度　大阪大学　前期理系　第 1 問

問題　自然数 n に対して関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x)} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) \quad (x \geqq 0)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$\displaystyle\int_0^n f_n(x)\,dx \leqq \int_0^1 \log(1+x)\,dx$ を示せ。

(2)　数列 $\{I_n\}$ を

$$I_n = \int_0^n f_n(x)\,dx$$

で定める。$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $\log(1+x) \leqq \log 2$ であることを用いて数列 $\{I_n\}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ であることは用いてよい。

N_osaka2015A_01.pbm