

2015年度 大阪大学 前期理系 第1問

問題 自然数 n に対して関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x)} \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) \quad (x \geq 0)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1) $\int_0^n f_n(x) dx \leq \int_0^1 \log(1+x) dx$ を示せ。

(2) 数列 $\{I_n\}$ を

$$I_n = \int_0^n f_n(x) dx$$

で定める。 $0 \leq x \leq 1$ のとき $\log(1+x) \leq \log 2$ であることを用いて数列 $\{I_n\}$ が収束することを示し、その極限值を求めよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ であることは用いてよい。

N.osaka2015A.01.pbm