2011 年度　大阪大学　前期理系　第５問

問題　正数 r に対して，$a_1=0$，$a_2=r$ とおき，数列 $\{a_n\}$ を次の漸化式で定める。

$$a_{n+1}=a_n+r_n(a_n-a_{n-1})\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

ただし a_n と a_{n-1} から漸化式を用いて a_{n+1} を決める際には硬貨を投げ，表がでたとき $r_n=\dfrac{r}{2}$，裏がでたとき $r_n=\dfrac{1}{2r}$ とする。ここで表がでる確率と裏がでる確率は等しいとする。a_n の期待値を p_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　p_3 および p_4 を，r を用いて表せ。

(2)　$n\geqq 3$ のときに p_n を，n と r を用いて表せ。

(3)　数列 $\{p_n\}$ が収束するような正数 r の範囲を求めよ。

(4)　r が (3) で求めた範囲を動くとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n$ の最小値を求めよ。

N_osaka2011A_05.pbm