2011 年度　大阪大学　前期理系　第４問

問題 a，b，c を正の定数とし，x の関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ を考える。以下，定数はすべて実数とする。

(1)　定数 p，q に対し，次をみたす定数 r が存在することを示せ。

$$x \geqq 1 \text{ ならば } |px + q| \leqq rx$$

(2)　恒等式 $(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$ を用いて，次をみたす定数 k，l が存在することを示せ。

$$x \geqq 1 \text{ ならば } \left| \sqrt[3]{f(x)} - x - k \right| \leqq \frac{l}{x}$$

(3)　すべての自然数 n に対して，$\sqrt[3]{f(n)}$ が自然数であるとする。このとき関数 $f(x)$ は，自然数の定数 m を用いて $f(x) = (x + m)^3$ と表されることを示せ。

N_osaka2011A_04.pbm