

問題 $-1 < x < 1$ に対して

$$f(x) = \log(1+x) + \log(1-x) - x \log(1-x)$$

とおく。ただし、対数は自然対数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $-1 < x < 1$ のとき、 $f'(x) \geq 0$ であることを示せ。
- (2) $-1 < x < 1$, $x \neq 0$ のとき、 $\frac{f(x)}{x} > 0$ であることを示せ。
- (3) n が 2 以上の整数のとき、不等式

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n+1} < \frac{n-1}{n} < \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n$$

が成り立つことを示せ。