

問題 自然数 n に対して, 関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1} - \sum_{k=0}^n (-x)^{3k} (1+x)$$

と定める。ただし, $(-x)^{3k}$ は $k=0$ のとき 1 とする。次の問いに答えよ。

(1) $f_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{3n+3}}{x^2 - x + 1}$ を示せ。

(2) $\left| \int_0^1 f_n(x) dx \right| \leq \frac{4}{3(3n+4)}$ を示せ。

(3) 無限級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} \right)$$

の和を求めよ。