

問題 自然数 n に対して

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+2k}, \quad b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+2k)^3}, \quad c_n = \sum_{k=1}^n \sin \frac{\pi}{n+2k}$$

とおく。このとき、次の問いに答えよ。ただし、 $x > 0$ のとき $\sin x < x$ が成り立つことを用いてよい。

- (1) $x > 0$ のとき不等式 $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$ が成り立つことを示せ。
- (2) 数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。
- (3) 数列 $\{b_n\}$ の極限を求めよ。
- (4) 数列 $\{c_n\}$ が収束することを示し、その極限値を求めよ。