2019年度　名古屋大学　前期理系　第４問

問題　正の整数 n に対して 1，2，$\cdots$，n を一列に並べた順列を考える。そのような順列は $n!$ 個ある。このうち 1 つを等確率で選んだものを $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ とする。この $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ に対し，各添字 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について，a_i の値が j であるとき，その j を添字にもつ a_j の値が k であることを $a_i=j \to a_j=k$ と書くことにする。ここで $a_i=j \to a_j=k \to a_k=l \to \cdots$ のようにたどり，それを続けていく。例えば $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7)=(2,\ 5,\ 6,\ 1,\ 4,\ 3,\ 7)$ のとき，

(i)　$a_1=2 \to a_2=5 \to a_5=4 \to a_4=1 \to a_1=2$

(ii)　$a_3=6 \to a_6=3 \to a_3=6$

(iii)　$a_7=7 \to a_7=7$

となり，どの i から始めても列は必ず一巡する。この一巡するそれぞれの列をサイクル，列に現れる相異なる整数の個数をサイクルの長さと呼ぶ。上の(i)，(ii)，(iii)は長さがそれぞれ 4，2，1 のサイクルになっている。

(1)　$n=3$ とする。選んだ順列が長さ 1 のサイクルを含む確率を求めよ。

(2)　$n=4$ とする。長さ 4 のサイクルを含む順列をすべて挙げよ。

(3)　n 以下の正の整数 k に対して

$$\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j} > \log(n+1) - \log k$$

を示せ。

(4)　n を奇数とする。選んだ順列が長さ $\dfrac{n+1}{2}$ 以上のサイクルを含む確率 p は $p > \log 2$ をみたすことを示せ。

N_nagoya2019A_04.pbm