

問題 正の整数 n に対し

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\cos^n \theta}$$

とする。

- (1) I_1 を求めよ。必要ならば $\frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \right)$ を使ってよい。
- (2) $n \geq 3$ のとき, I_n を I_{n-2} と n で表せ。
- (3) xyz 空間において xy 平面内の原点を中心とする半径 1 の円板を D とする。 D を底面とし, 点 $(0, 0, 1)$ を頂点とする円錐を C とする。 C を平面 $x = \frac{1}{2}$ で 2 つの部分に切断したとき, 小さい方を S とする。 z 軸に垂直な平面による切り口を考えて S の体積を求めよ。