2018年度　長崎大学　前期理系　第４問

問題 積分を用いて表される次の関数

$$F_n(x)=\int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{-t}\,dt \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

について，以下の問いに答えよ。ただし，$0!=1$ と定める。また，関数 $y=t^0$ は，関数 $y=1$ を意味する。

(1)　部分積分を利用して，$F_2(x)$ を $F_1(x)$ を用いて表せ。同様に，$F_1(x)$ を $F_0(x)$ を用いて表せ。

(2)　$F_0(x)$ を計算し，積分を含まない式として表せ。その結果を利用して，$F_1(x)$ を積分を含まない式として表せ。さらに，$F_2(x)$ を積分を含まない式として表せ。

(3)　$n \geqq 1$ のとき，$F_n(x)$ を $F_{n-1}(x)$ を用いて表せ。さらに，$n \geqq 0$ のとき，$F_n(x)$ を積分を含まない式として表せ。

(4)　$p(x)=x^n$ とおくとき，k 次導関数

$$p^{(k)}(x) \ (k=1,\,2,\,\cdots,\,n)$$

を求めよ。そして，

$$\int_0^x t^n e^{-t}\,dt = n! - e^{-x}\sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(x)$$

が成り立つことを示せ。ただし，$p^{(0)}(x)=p(x)$ と定める。

N_nagasaki2018A_04.pbm