

2021 年度 宮崎大学 前期理系 第 5 問 (3)

問題 次の空欄 ～ を適切な数または数式で埋めよ。ただし、 は x だけを用いて表された数式、 は y だけを用いて表された数式、 と は整数で埋めよ。また、 $\log x$ は x の自然対数を表す。

曲線 $y = \log \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}$ ($x \geq 2$) の概形は右図のようになる。

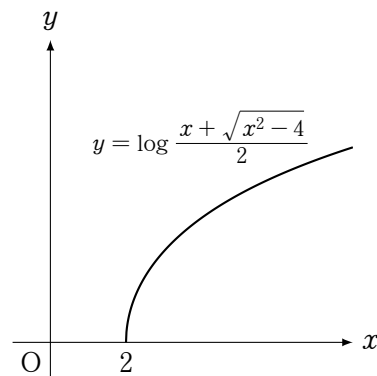
$y = \log \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}$ のとき、

$$(2e^y - x)^2 = \text{カ}$$

であり、

$$x = \text{キ}$$

である。



曲線 $y = \log \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}$ と x 軸および直線 $x = 4$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とする。体積 V は、

$$V = \int_2^4 \text{ク} dx$$

により求めることができる。 $\log \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2} = t$ とおくと、 V は、 t だけで表される数式 $f(t) = \text{ケ}$ と $a = \log(2 + \sqrt{3})$ を用いて、

$$V = \int_0^a f(t) dt$$

と表される。ここで、0 でない定数 k に対し、関数 $t^2 e^{kt}$ の不定積分は

$$\int t^2 e^{kt} dt = \frac{e^{kt}}{k^3} (\text{コ}) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

である。よって、

$$V = 4\pi \left(a^2 - \sqrt{\text{サ}} a + \text{シ} \right)$$

である。