

問題 以下の問いに答えよ。

(1) 2以上の自然数 n に対し $\int_0^1 x^{n-1} e^{-\frac{n-1}{n}x^n - \frac{1}{n}} dx$ を求めよ。

(2) $x > 0$ とする。 $\log x \leq \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$ を示せ。さらにこの不等式を用いて

$$(n-3)\log x - \frac{n-1}{n}x^n + x^2 - \frac{1}{n} \leq 0 \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$$

を示せ。

(3) $x > 0$ のとき $x^{n-1} e^{-\frac{n-1}{n}x^n - \frac{1}{n}} \leq x^2 e^{-x^2} \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$ を示せ。さらにこの不等式を用いて $e^{-\frac{1}{3}} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx$ を示せ。