

2016 年度 三重大学 前期理系 第 1 問

問題 平面上の $\triangle ABC$ と点 O を考える。 m, n は正の実数とする。

- (1) 辺 AB を $m:n$ に内分する点を M とする。このとき $|\overrightarrow{AB}|^2, |\overrightarrow{OM}|^2$ を $|\overrightarrow{OA}|^2, |\overrightarrow{OB}|^2$ と内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ で表せ。さらに

$$\frac{mn}{m+n} |\overrightarrow{AB}|^2 + (m+n) |\overrightarrow{OM}|^2 = n |\overrightarrow{OA}|^2 + m |\overrightarrow{OB}|^2$$

を示せ。

- (2) 辺 AB を $m:n$ に内分する点を M_1 , 辺 BC を $m:n$ に内分する点を M_2 , 辺 CA を $m:n$ に内分する点を M_3 とする。このとき $|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2$ は

$$\frac{mn}{(m+n)^2} \left(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2 \right) + |\overrightarrow{OM}_1|^2 + |\overrightarrow{OM}_2|^2 + |\overrightarrow{OM}_3|^2$$

に等しいことを示せ。

- (3) (2) の m, n を変化させたとき

$$|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OM}_1|^2 - |\overrightarrow{OM}_2|^2 - |\overrightarrow{OM}_3|^2$$

の最大値を $|\overrightarrow{AB}|^2, |\overrightarrow{BC}|^2, |\overrightarrow{CA}|^2$ で表せ。

N_mie2016A_01.pbm