2016 年度　三重大学　前期理系　第 1 問

問題　平面上の △ABC と点 O を考える。m，n は正の実数とする。

(1)　辺 AB を $m:n$ に内分する点を M とする。このとき $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2$ を $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$ と内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。さらに

$$\frac{mn}{m+n}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+(m+n)|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2=n|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+m|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$

を示せ。

(2)　辺 AB を $m:n$ に内分する点を M_1，辺 BC を $m:n$ に内分する点を M_2，辺 CA を $m:n$ に内分する点を M_3 とする。このとき $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$ は

$$\frac{mn}{(m+n)^2}\left(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2\right)+|\overrightarrow{\mathrm{OM_1}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OM_2}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OM_3}}|^2$$

に等しいことを示せ。

(3)　(2) の m，n を変化させたとき

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OM_1}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OM_2}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OM_3}}|^2$$

の最大値を $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2$ で表せ。

N_mie2016A_01.pbm