

問題 複素数 z_n を

$$z_0 = 0, z_1 = 1, z_{n+2} = z_{n+1} + \alpha(z_{n+1} - z_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

により定める。ただし、 i は虚数単位とし、 $\alpha = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ とする。また、複素数平面上で複素数 z_n を表す点を P_n とする。

- (1) z_2, z_3, z_4 を求めよ。
- (2) 点 P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 を図示せよ。また、線分 $P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4$ の長さ、および $\angle P_2P_1P_0, \angle P_3P_2P_1, \angle P_4P_3P_2$ の値も図中に示せ。
- (3) $z_{n+1} - z_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を α と n を用いて表せ。
- (4) z_n の実部、虚部をそれぞれ x_n, y_n とする。このとき、 x_n, y_n をそれぞれ n を用いて表せ。
- (5) (4) で求めた x_n, y_n について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ をそれぞれ求めよ。