

## 2021年度 九州大学 前期理系 第4問

**問題** 自然数  $n$  と実数  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $a_n \neq 0$ ) に対して, 2つの整式

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

を考える。 $\alpha, \beta$  を異なる複素数とする。複素数平面上の2点  $\alpha, \beta$  を結ぶ線分上にある点  $\gamma$  で,

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\gamma)$$

をみたすものが存在するとき,

$\alpha, \beta, f(x)$  は平均値の性質をもつ

ということにする。以下の問いに答えよ。ただし,  $i$  は虚数単位とする。

- (1)  $n = 2$  のとき, どのような  $\alpha, \beta, f(x)$  も平均値の性質をもつことを示せ。
- (2)  $\alpha = 1 - i, \beta = 1 + i, f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  が平均値の性質をもつための, 実数  $a, b, c$  に関する必要十分条件を求めよ。
- (3)  $\alpha = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \beta = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, f(x) = x^7$  は, 平均値の性質をもたないことを示せ。

N.kyusyu2021A.04.pbm