2017 年度　熊本大学　前期理系　第 1 問

問題　原点を O とする座標空間内に 3 点 A$(a, 0, 0)$，B$(0, b, 0)$，C$(0, 0, c)$ がある。ただし，$a > 0$，$b > 0$，$c > 0$ とする。$\angle \mathrm{BAC} = \theta$ とし，$\triangle \mathrm{ABC}$ の面積を S とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\cos\theta$，$\sin\theta$ を a，b，c を用いて表せ。

(2)　点 O を中心とする半径 1 の球面上の点を H とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{HA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{HC}}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ に垂直であるとき，

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$$

が成り立つことを示せ。

(3)　(2) の条件のもとで $a = 3$ としたとき，面積 S の最小値とそのときの b，c の値を求めよ。

N_kumamoto2017A_21.pbm