

2024年度 鹿児島大学 前期理系 第3問-1

問題 $c \geq 3$ である実数 c に対して、 x の2次方程式

$$x^2 - 2(c+1)x + c^2 - 2c + 9 = 0 \quad \cdots\cdots\textcircled{1}$$

を考える。

(1) 2次方程式①は、 c より大きい実数解と c より小さい実数解をもつことを示せ。

(1)の結果を用いて、次のように数列 $\{a_n\}$ を定める。 $a_1 = 3$ とする。 $c = a_1$ のときの方程式①の実数解のうち、 a_1 より大きい方を a_2 とおく。次に $a_2 > 3$ が成り立つことに注意して、 $c = a_2$ のときの方程式①の実数解のうち、 a_2 より大きい方を a_3 とおく。これを繰り返す。すなわち、 $3 = a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n$ が成り立ち、2次方程式

$$x^2 - 2(a_n+1)x + a_n^2 - 2a_n + 9 = 0 \quad \cdots\cdots\textcircled{2}$$

の実数解のうち、大きい方が a_{n+1} である。

(2) $n \geq 2$ とする。2次方程式②の実数解のうち、小さい方は a_{n-1} であることを示せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ が次の漸化式を満たすことを示せ。

$$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 2 \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

(4) 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

と定めるとき、数列 $\{b_n\}$ と数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。