

問題 数列 $\{a_n\}$ は,

$$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{2a_n + 2}{a_n + 2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められているとする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) n が自然数のとき、数学的帰納法を用いて $\sqrt{2} < a_n$ を示せ。
- (2) n が自然数のとき、 $a_{n+1} < a_n$ を示せ。
- (3) n が自然数のとき、数学的帰納法を用いて

$$a_n - \sqrt{2} \leq \frac{(2 - \sqrt{2})^n}{3^{n-1}}$$

を示せ。