

問題 数列 $\{a_n\}$ が,

$$a_1 = 1, \quad \frac{(1 - a_{n+1})a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{(1 + a_{n+1})a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとき、次の問いに答えよ。ただし、すべての自然数 n について $a_n > 0$ とする。

(1) 数列 $\{b_n\}$ が $b_n = \frac{1}{a_n^2}$ で与えられるとき、 b_2 , b_3 , b_4 の値を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 不等式 $\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \sum_{k=1}^n a_k$ が成り立つことを示せ。