

問題 N を自然数として、表と裏が等確率で出るコインを N 回投げる試行を考え、この試行の結果によって関数 $f(x)$ を次のように定義する。

1. $x \leq 0$ のとき, $f(x) = 0$

2. x が N 以下の自然数 n に等しいとき, n 回目に

表が出れば $f(n) = f(n-1) + 1$

裏が出れば $f(n) = f(n-1) - 1$

3. x が $0 < x < N$ を満たし、かつ自然数でないとき, $n-1 < x < n$ を満たす自然数を n として,

$$f(x) = (x - n + 1)f(n) + (n - x)f(n-1)$$

4. $x > N$ のとき, $f(x) = f(N)$

このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) $N = 8$ のとき、試行の結果が「表, 表, 裏, 裏, 表, 裏, 裏, 裏」の順となったとき, $f(x)$ のグラフを描け。
- (2) 自然数 N と 0 以上の整数 k について, $f(x)$ が極値をとる点の個数が k となる確率を $P(k)$ とする。 $P(k)$ を N, k を用いて表せ。
- (3) 自然数 N と 0 以上の整数 k について, $f(x)$ が極大となる点の個数が k となる確率を $Q(k)$ とする。 $Q(k)$ を N, k を用いて表せ。
- (4) (3) の $Q(k)$ について $\sum_{k=0}^N kQ(k)$ を N を用いて表せ。