2018 年度　東京医科歯科大学　前期理系　第 1 問

問題　0 以上の整数 x，y に対して，$R(x, y)$ を次のように定義する。

$$\begin{cases} xy = 0 \text{ のとき，} R(x, y) = 0 \\ xy \neq 0 \text{ のとき，} x \text{ を } y \text{ で割った余りを } R(x, y) \text{ とする。} \end{cases}$$

正の整数 a，b に対して，数列 $\{r_n\}$ を次のように定義する。

$$r_1 = R(a, b), \quad r_2 = R(b, r_1),$$
$$r_{n+1} = R(r_{n-1}, r_n) \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

また，$r_n = 0$ となる最小の n を N で表す。例えば $a = 7$，$b = 5$ のとき $N = 3$ である。
次に，数列 $\{f_n\}$ を次のように定義する。

$$f_1 = f_2 = 1,\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$a = f_{102}$，$b = f_{100}$ のとき，N を求めよ。

(2)　正の整数 a，b について，a が b で割り切れないとき，$r_1 \geqq f_N$ が成立することを示せ。

(3)　2 以上の整数 n について，$10f_n < f_{n+5}$ が成立することを示せ。

(4)　正の整数 a，b について，a が b で割り切れないとき，

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{r_k} < \frac{259}{108}$$

が成立することを示せ。

N_ikashika2018A_01.pbm