問題　0 以上の整数 x，y に対して，$R(x,\,y)$ を次のように定義する。

$$\begin{cases} xy=0 \text{ のとき，} R(x,\,y)=0 \\ xy \fallingdotseq 0 \text{ のとき，} x \text{ を } y \text{ で割った余りを } R(x,\,y) \text{ とする。} \end{cases}$$

正の整数 a，b に対して，数列 $\{r_n\}$ を次のように定義する。

$$r_1=R(a,\,b),\quad r_2=R(b,\,r_1),$$
$$r_{n+1}=R(r_{n-1},\,r_n)\quad (n=2,\,3,\,4,\,\cdots)$$

また，$r_n=0$ となる最小の n を N で表す。例えば $a=7$，$b=5$ のとき $N=3$ である。
次に，数列 $\{f_n\}$ を次のように定義する。

$$f_1=f_2=1,\ f_{n+1}=f_n+f_{n-1}\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$a=f_{102}$，$b=f_{100}$ のとき，N を求めよ。

(2)　正の整数 a，b について，a が b で割り切れないとき，$r_1 \geqq f_N$ が成立することを示せ。

(3)　2 以上の整数 n について，$10f_n<f_{n+5}$ が成立することを示せ。

(4)　正の整数 a，b について，a が b で割り切れないとき，

$$\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{r_k}<\frac{259}{108}$$

が成立することを示せ。

N_ikashika2018A_01.pbm