

2019年度 北海道大学 前期理系 第5問

**問題**  $f(x)$  を区間  $[0, \pi]$  で連続な関数とする。関数  $f_1(x), f_2(x), \dots$  を関係式

$$f_1(x) = f(x),$$

$$f_{n+1}(x) = 2 \cos x + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \sin(x-t) dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。さらに、自然数  $n$  に対して

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \sin t dt, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \cos t dt$$

とおく。

- (1)  $a_{n+1}, b_{n+1}$  を  $a_n, b_n$  を用いて表せ。
- (2)  $c_n = a_n - 1$  とおく。このとき、 $c_{n+2} = -c_n$  が成立することを示し、一般項  $c_n$  を  $a_1$  と  $b_1$  を用いて表せ。
- (3)  $a_n, b_n$  が  $n$  によらない定数となるような  $f(x)$  を1つ求めよ。