

問題 数列 $\{a_n\}$ は次を満たすとする。

$$a_1 = 6, a_{n+1} = \frac{6a_n + 5}{a_n + 2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = a_n - 5 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定める。このとき、すべての自然数 n に対して、 $b_n > 0$ が成り立つことを示せ。

(2) (1) で定めた $\{b_n\}$ に対して、数列 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ の一般項を求めよ。また、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 自然数 n に対して、

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(a_k - \frac{5001}{1000} \right)$$

と定める。このとき、 S_n が最大となる n を求めよ。