

問題 次の問いに答えよ。

- (1) $x > 0$ において,

$$x \log x \geq x - 1$$

となることを示せ。さらに、等号が成り立つときの x の値を求めよ。

- (2) a, b は定数で, $a > b > 0$ とする。 $x > 0$ に対して,

$$f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$A(x) = \frac{2a^x}{a^x + b^x}, \quad B(x) = \frac{2b^x}{a^x + b^x}$$

とおく。

- (i) $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2x^2} \{A(x) \log A(x) + B(x) \log B(x)\}$ となることを示せ。

- (ii) $f(x)$ は $x > 0$ において, 増加することを示せ。

- (iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ を示せ。