

**問題** 以下の枠内の問題

問題

次の条件を満たす係数が整数の多項式  $f(x)$  を考える。

- (I)  $f(0)$  は4で割り切れない。
  - (II) 方程式  $f(x) = 0$  は  $x = 1$  で重解をもつ。
  - (III) 方程式  $f(x) = x(x-1)(x-2)$  は異なる整数解をもつ。
- このとき、 $f(4)$  を36で割ったときの余りを求めよ。

に対する右の答案 A に対して、2つの下線部 (a) および (b) の詳しい証明を与えよ。ただし、2つの波線の事実は証明なしに用いてよい。

問題

条件 (II) より、因数定理を用いれば  $f(x) = (x-1)^2 g(x)$  を満たす係数が整数の多項式  $g(x)$  が存在する。このとき、条件 (III) を満たす整数解の中で1以外の解  $x_0$  をとれば、

$$(x_0 - 1)g(x_0) = x_0(x_0 - 2) \cdots \cdots (\#)$$

が成立する。ここで、 $g(x_0)$  は整数であるから、式 (#) を満たす  $x_0$  は0または2である。もし  $x_0 = 0$  とすれば、 $f(0) = 0$  となり、この値は4で割り切れるから、条件 (I) に反する。ゆえに  $x_0 \neq 0$  であるから  $x_0 = 2$  であり、このとき、式 (#) より

$$g(2) = 0$$

であるから、再び因数定理を用いれば、

$$g(x) = (x-2)h(x)$$

を満たす係数が整数の多項式  $h(x)$  が存在する。よって、

$$f(x) = (x-1)^2(x-2)h(x)$$

と表すことができるから、 $h(4)$  は奇数である。以上より、整数  $m$  を用いて  $h(4) = 2m + 1$  とおけば

$$f(4) = 18h(4) = 36m + 18$$

であるから、 $f(4)$  を36で割ったときの余りは18である。