2023 年度　浜松医科大学　前期理系　第 1 問

問題　以下の枠内の問題

問題

次の条件を満たす係数が整数の多項式 $f(x)$ を考える。

(I)　$f(0)$ は 4 で割り切れない。

(II)　方程式 $f(x)=0$ は $x=1$ で重解をもつ。

(III)　方程式 $f(x)=x(x-1)(x-2)$ は異なる整数解をもつ。

このとき，$f(4)$ を 36 で割ったときの余りを求めよ。

に対する右の答案 A に対して，2 つの下線部 (a) および (b) の詳しい証明を与えよ。ただし，2 つの波線部の事実は証明なしに用いてよい。

答案 A

条件 (II) より，因数定理を用いれば $f(x)=(x-1)^2g(x)$ を満たす係数が整数の多項式 $g(x)$ が存在する。このとき，条件 (III) を満たす整数解の中で 1 以外の解 x_0 をとれば，

$$(x_0-1)g(x_0)=x_0(x_0-2) \cdots\cdots (\#)$$

が成立する。ここで，$g(x_0)$ は整数であるから，$\underset{(a)}{\text{式 (\#) を満たす } x_0 \text{ は 0 または 2 である。}}$ もし $x_0=0$ とすれば，$f(0)=0$ となり，この値は 4 で割り切れるから，条件 (I) に反する。ゆえに $x_0 \neq 0$ であるから $x_0=2$ であり，このとき，式 (#) より

$$g(2)=0$$

であるから，再び因数定理を用いれば，

$$g(x)=(x-2)h(x)$$

を満たす係数が整数の多項式 $h(x)$ が存在する。よって，

$$f(x)=(x-1)^2(x-2)h(x)$$

と表すことができるから，$\underset{(b)}{h(4) \text{ は奇数である。}}$ 以上より，整数 m を用いて $h(4)=2m+1$ とおけば

$$f(4)=18h(4)=36m+18$$

であるから，$f(4)$ を 36 で割ったときの余りは 18 である。