

問題 次の問題

問題

表面と裏面が出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ であるコインを投げる試行を繰り返し、同じ面が 3 回連続して出た時点で試行を終了する。 n 回投げ終えた段階で試行が終了する確率 p_n を求めよ。

に対する右の答案 A について以下の問いに答えよ。

- (1) もし答案 A に誤りがあれば誤りを指摘し、その理由を述べよ。ただし、すでに指摘してある誤った結論から論理的に導き出された結論を誤りとして指摘する必要はない。誤りがないときは「誤りなし」と答えよ。
- (2) 答案 A で導かれた p_n と正解の p_n とで値が異なるとき、値が異なる最小の n を求め、その n に対する正解の p_n の値を答えよ。そのような n がないときは「すべて一致する」と答えよ。

答案 A

自然数 n に対して、コインを n 回投げ終えた段階で、その後最短で試行が終了するために必要な回数が k 回 ($k \geq 0$) である確率を $p_n(k)$ とする。このとき、 k は 0, 1, 2 のいずれかであるから、確率の総和は

$$p_n(0) + p_n(1) + p_n(2) = 1$$

である。また、

$$p_n(0) = p_n, \quad p_{n+1}(0) = \frac{1}{2} p_n(1), \quad p_{n+2}(0) = \frac{1}{4} p_n(2)$$

であるから漸化式

$$p_n + 2p_{n+1} + 4p_{n+2} = 1 \quad (n \geq 1)$$

を得る。ここで、 $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = 1$ なので、 $q_n = 2^n \left(p_n - \frac{1}{7} \right)$ とすれば

$$q_n + q_{n+1} + q_{n+2} = 0$$

である。よって $n \geq 4$ に対して

$$q_n = -q_{n-1} - q_{n-2} = (q_{n-2} + q_{n-3}) - q_{n-2} = q_{n-3}$$

が成立する。以上より、

$$Q(n) = \begin{cases} q_1 & (n \text{ を } 3 \text{ で割ったときの余りが } 1 \text{ のとき}) \\ q_2 & (n \text{ を } 3 \text{ で割ったときの余りが } 2 \text{ のとき}) \\ q_3 & (n \text{ が } 3 \text{ で割り切れるとき}) \end{cases}$$

とすれば求める確率は

$$p_n = \frac{q_n}{2^n} + \frac{1}{7} = \frac{Q(n)}{2^n} + \frac{1}{7} \quad (n \geq 4)$$

である。また、最初の 2 項は定義より $p_1 = p_2 = 0$ であり、 p_n の漸化式で $n = 1$ とすれば $p_1 + 2p_2 + 4p_3 = 1$ であるから $p_3 = \frac{1}{4}$ である。さらに

$$q_1 = -\frac{2}{7}, \quad q_2 = -\frac{4}{7}, \quad q_3 = \frac{6}{7}$$

である。したがって

$$p_1 = p_2 = 0, \quad p_3 = \frac{1}{4}, \quad p_n = \frac{Q(n)}{2^n} + \frac{1}{7} \quad (n \geq 4)$$

となる。