2020 年度　岐阜大学　後期理系　第４問

問題　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 1,\ b_1 = 1,\ a_{n+1} = 8a_n + 21b_n,\ b_{n+1} = 3a_n + 8b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき $a_n > 0$，$b_n > 0$ である。以下の問に答えよ。

(1)　${a_1}^2 - 7{b_1}^2$ と ${a_2}^2 - 7{b_2}^2$ の値を求めよ。

(2)　${a_n}^2 - 7{b_n}^2$ が n によらない定数であることを示せ。

(3)　$b_n \geqq 8^{n-1}$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ を求めよ。

N_gifu2020C_04.pbm