2020 年度　岐阜大学　後期理系　第３問

問題　k は正の定数とする。正の実数 t について，xy 平面上の点

$$\mathrm{O}(0,\ 0),\ \mathrm{A}\left(t+\log\frac{k+1}{k},\ 0\right),\ \mathrm{B}(0,\ e^{-t}),\ \mathrm{C}\left(t+\log\frac{k+1}{k},\ e^{-t}\right)$$

を考える。長方形 OACB で囲まれた領域を T_0 とする。xy 平面上の領域

$$T_1 : 0 \leqq y \leqq e^{-x},\ T_2 : y \geqq e^{-x}$$

を考える。T_0 と T_1 の共通部分の面積を S_1，T_0 と T_2 の共通部分の面積を S_2 とする。以下の問に答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1)　線分 AC と曲線 $y=e^{-x}$ の交点 P，および線分 BC と曲線 $y=e^{-x}$ の交点 Q の座標をそれぞれ求めよ。

(2)　S_1，S_2 を t，k を用いて表せ。

(3)　$G=S_1-kS_2$ とおく。G を t で微分せよ。

(4)　t が正の実数を動くとき，(3) で定めた G の最大値 M を k を用いて表せ。

(5)　k は正の実数を動くとする。(4) で求めた M を k の関数とみなして $M(k)$ と表す。$\displaystyle\lim_{k\to\infty}M(k)$ および $\displaystyle\lim_{k\to+0}M(k)$ を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{h\to\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h=e$，$\displaystyle\lim_{h\to+0}h\log h=0$ を用いてよい。

N_gifu2020C_03.pbm