2018 年度　福井大学　前期理系　第 4 問

問題　$x > -1$ で定義された関数 $f(x)$ は，等式

$$(x+1)f(x) = \int_0^x f(t)\,dt + 2\log(x+1) + x - 2$$

を満たす。以下の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1) (i)　$f(x)$ を求めよ。

(ii)　方程式 $f(x) = 0$ は，開区間 $(0,\ e)$ に実数解をただ 1 つもつことを示せ。

(2)　$h(x) = f(x) + \dfrac{2}{x+1}$ とおき，$h(x)$ の逆関数を $g(x)$ とする。

(i)　$g(x)$ を求めよ。

(ii)　自然数 n に対して，

$$P(n) = g\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\,dx$$

とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} |P(n)|$ を求めよ。

N_fukui2018A_04.pbm