

問題 $x > -1$ で定義された関数 $f(x)$ は、等式

$$(x+1)f(x) = \int_0^x f(t) dt + 2\log(x+1) + x - 2$$

を満たす。以下の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。

(1) (i) $f(x)$ を求めよ。

(ii) 方程式 $f(x) = 0$ は、开区間 $(0, e)$ に実数解をただ 1 つもつことを示せ。

(2) $h(x) = f(x) + \frac{2}{x+1}$ とおき、 $h(x)$ の逆関数を $g(x)$ とする。

(i) $g(x)$ を求めよ。

(ii) 自然数 n に対して、

$$P(n) = g\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx$$

とおくとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} |P(n)|$ を求めよ。