

2020年度 千葉大学 前期理系 第5問

問題 定義域を $0 \leq x \leq 1$ とする関数 $f_n(x)$ と $f(x)$ を以下で定める。

$$f_1(x) = 0, \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x (f_n(t) - 1)^2 dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

(1) 正の整数 n に対して, 不等式

$$0 \leq f_n(x) \leq 1 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

が成り立つことを証明せよ。

(2) 正の整数 n に対して, 不等式

$$(-1)^n f_n(x) \geq (-1)^n f(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

が成り立つことを証明せよ。

(3) 実数 a ($0 \leq a \leq 1$) に対して, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$ を求めよ。