

問題 a, b は正の実数で $a > b$ とし, α は $\tan \alpha = \frac{b}{a}$ を満たす角とする。ただし, $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ とする。このとき, 次の (1) と (2) に答えよ。

- (1) 座標平面上に原点 O を中心とし, 半径が a で中心角は $\frac{\pi}{2}$ より小さい扇形 BOA がある。ただし, 点 A の座標は $(a, 0)$ であり, 点 B は第 1 象限にある。この扇形を y 軸方向に $\frac{b}{a}$ 倍に縮小した図形を COA で表す。ここで点 C は, 点 B の座標を (x_0, y_0) としたときに座標が $(x_0, \frac{b}{a}y_0)$ となる点であり, $\angle COA = \frac{\pi}{4}$ とする。図形 COA は図 1 の灰色部分である。

(i) 扇形 BOA の中心角 $\angle BOA$ を α を用いて表せ。

(ii) 図形 COA の面積を a, b, α を用いて表せ。

(iii) 図形 COA を楕円 $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ によって 2 つの図形に分けたとき, 原点 O を含む方の図形の面積を m , 点 A を含む方の図形の面積を n とする。 m と n を a, b, α を用いてそれぞれ表せ。

- (2) 座標平面上で次の不等式の表す 4 つの領域を考える。

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \text{ の表す領域を } U_0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1 \text{ の表す領域を } U_1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} \leq 1 \text{ の表す領域を } V_0, \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} \geq 1 \text{ の表す領域を } V_1$$

とする。さらに $S = U_0 \cap V_0$, $T = (U_0 \cap V_1) \cup (U_1 \cap V_0)$ の面積をそれぞれ s, t とする。図 2 において, 灰色部分が領域 S , 4 つの斜線部分が領域 T である。

(i) $s = t$ となるとき α の値を求めよ。

(ii) a, b が $a^2 + b^2 = 1$ を満たしながら変化するとき, $S \cup T$ の面積が最大となる α の値を α_0 とする。 $\alpha = \alpha_0$ のとき, s と t の大小を比較せよ。

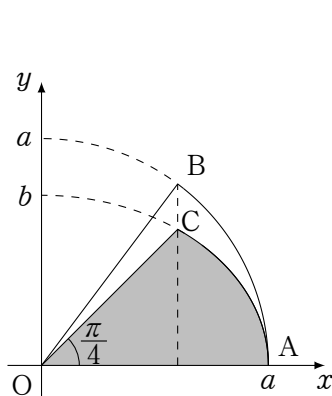


図 1

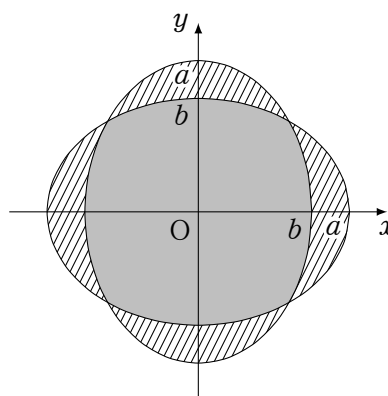


図 2