

問題 $0 \leq x \leq 1$ の範囲で連続な関数 $f(x)$ について、数列 $\{g_n\}$ を

$$g_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n} + \frac{1}{2n}} f(x) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

と定める。次の各問いに答えよ。ただし、 $a, b, c, p, q, \alpha, \beta$ は 0 でない定数とし、 e は自然対数の底である。

(1) $f(x) = ax^2 + bx + c$ のとき、 g_n を求めよ。

(2) $f(x) = e^{\alpha x}$ のとき、 g_n を求めよ。

(3) $I = \int_0^1 f(x) dx$ とおく。このとき、 $f(x) = pe^{\alpha x} + qe^{\beta x} + ax^2 + bx + c$ について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ を I を用いて表せ。