2019年度　旭川医科大学　前期理系　第４問

問題　2つの数列 $\{p_n\}$，$\{q_n\}$ は次の漸化式を満たしている。

$$\begin{cases} p_{n+1} = \dfrac{1}{2}p_n + \dfrac{1}{4}q_n - \dfrac{1}{4} \\ q_{n+1} = \dfrac{1}{2}p_n + \dfrac{3}{4}q_n + \dfrac{1}{4} \end{cases} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

このとき，次の各問いに答えよ。

(1)　$p_n + q_n = p_1 + q_1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つことを示せ。

(2)　一般項 p_n を p_1，q_1 を用いて表せ。

(3)　無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ が収束し，和が 1 となるように，p_1 と q_1 の値を定めよ。

(4)　(2)，(3) で求めた数列 $\{p_n\}$ について，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} np_n$ の和を求めよ。ただし，$|r|<1$ のとき $\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ であることは，証明なしに用いてよい。