

問題 a は実数で $a > 1$ とし、曲線 $y = \log x$ 上に 2 点 $A(a, \log a)$, $B\left(\frac{1}{a}, \log \frac{1}{a}\right)$ をとる。直線 AB と曲線 $y = \log x$ で囲まれた部分の面積を S とし、直線 AB , x 軸, 直線 $x = \frac{1}{a}$ および直線 $x = a$ で囲まれた部分の面積を T とする。このとき、次の各問いに答えよ。

- (1) S, T を a を用いて表せ。
- (2) 次の極限値を求めよ。ただし、(iii) において必要であれば

$$x > 0 \text{ のとき, } \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

が成り立つことを証明なしに用いてよい。

$$(i) \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S}{T} \quad (ii) \lim_{a \rightarrow 1+0} \frac{T}{(a-1)^2} \quad (iii) \lim_{a \rightarrow 1+0} \frac{S}{(a-1)^2}$$

$$(iv) \lim_{a \rightarrow 1+0} \frac{S}{T}$$

- (3) $a > 1$ の範囲で、 $\frac{S}{T}$ は単調に増加することを示せ。
- (4) $S = T$ となる a が $e^{\frac{3}{2}} < a < e^2$ の範囲に唯 1 つあることを示せ。ただし、 e は自然対数の底で $e = 2.7182\cdots$ である。