2017年度 旭川医科大学 前期理系 第2問

問題 a, b, c を実数とする。3次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の3つの解を α, β, γ とする。これらの解は次の4つの条件を満たす。

(i) $\gamma = -\frac{1}{2}$

(ii) $|\alpha| = |\beta| = 1$

(iii) α の虚部は正である

(iv) 複素数平面上的点 $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$ は同一直線 L 上にある

このとき、次の問いに答えよ。

(1) a, b, c および α, β の値を求めよ。

(2) 点 $P(z)$ が直線 L 上を動くとき、 $w_1 = \frac{1+4z}{2z}$ で表される点 $Q(w_1)$ の軌跡を複素数平面上に図示せよ。

(3) 動点 $R(w_2)$ は、 $\arg\left(\frac{\beta - w_2}{\alpha - w_2}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$ を満たす。

このとき、 $R(w_2)$ の軌跡を複素数平面上に図示するとともに、(2) で求めた $Q(w_1)$ との距離 $|w_1 - w_2|$ のとりうる値の範囲を求めよ。