

問題 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次のように定義する。

$$a_1 = 1, b_1 = \sqrt{3}, \begin{cases} a_{n+1} = a_n - \sqrt{3}b_n \\ b_{n+1} = \sqrt{3}a_n + b_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えなさい。ただし、 i は虚数単位とする。

- (1) 複素数 $a_1 + b_1i$ を極形式で表しなさい。
 (2) すべての自然数 n に対して、次の等式が成り立つことを示しなさい。

$$a_n + b_ni = (1 + \sqrt{3}i)^n$$

- (3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めなさい。

- (4) 自然数 n に対して、実数 x_n , y_n を

$$x_n + y_ni = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(a_n + b_ni)$$

により定める。 $\frac{y_n}{x_n}$ の最小値を求めなさい。