◀2015 年　筑波大学（前期）▶

1　以下の問いに答えよ．

(1)　座標平面において，次の連立不等式の表す領域を図示せよ．

$$\begin{cases} x^2+y \leqq 1 \\ x-y \leqq 1 \end{cases}$$

(2)　2 つの放物線 $y=x^2-2x+k$ と $y=-x^2+1$ が共有点をもつような実数 k の値の範囲を求めよ．

(3)　$x,\ y$ が (1) の連立不等式を満たすとき，$y-x^2+2x$ の最大値および最小値と，それらを与える $x,\ y$ の値を求めよ．

2　半径 1 の円を内接円とする三角形 ABC が，辺 AB と辺 AC の長さが等しい二等辺三角形であるとする．辺 BC, CA, AB と内接円の接点をそれぞれ P, Q, R とする．また，$\alpha=\angle\mathrm{CAB},\ \beta=\angle\mathrm{ABC}$ とし，三角形 ABC の面積を S とする．

(1)　線分 AQ の長さを α を用いて表し，線分 QC の長さを β を用いて表せ．

(2)　$t=\tan\dfrac{\beta}{2}$ とおく．このとき，S を t を用いて表せ．

(3)　不等式 $S \geqq 3\sqrt{3}$ が成り立つことを示せ．さらに，等号が成立するのは，三角形 ABC が正三角形のときに限ることを示せ．

3　p と q は正の整数とする．2 次方程式 $x^2-2px-q=0$ の 2 つの実数解を $\alpha,\ \beta$ とする．ただし，$\alpha>\beta$ とする．数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\right) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

によって定める．ただし $\alpha^0=1,\ \beta^0=1$ と定める．

(1)　すべての自然数 n に対して，$a_{n+2}=2pa_{n+1}+qa_n$ であることを示せ．

(2)　すべての自然数 n に対して，a_n は整数であることを示せ．

(3)　自然数 n に対し，$\dfrac{\alpha^{n-1}}{2}$ 以下の最大の整数を b_n とする．p と q が $q<2p+1$ を満たすとき，b_n を a_n を用いて表せ．

4　$f(x)=\log(e^x+e^{-x})$ とおく．曲線 $y=f(x)$ の点 $(t,\ f(t))$ における接線を ℓ とする．直線 ℓ と y 軸の交点の y 座標を $b(t)$ とおく．

(1)　次の等式を示せ．

$$b(t)=\frac{2te^{-t}}{e^t+e^{-t}}+\log(1+e^{-2t})$$

(2)　$x \geqq 0$ のとき，$\log(1+x) \leqq x$ であることを示せ．

(3)　$t \geqq 0$ のとき，

$$b(t) \leqq \frac{2}{e^t+e^{-t}}+e^{-2t}$$

であることを示せ．

(4)　$b(0)=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{4t}{(e^t+e^{-t})^2}\,dt$ であることを示せ．

5　$f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{2}(\cos x - \sin x)$$
$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$h(x) = \sin x$$

とおく．3 つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$ の $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす部分を，それぞれ C_1, C_2, C_3 とする．

(1)　C_2 と C_3 の交点の座標を求めよ．

(2)　C_1 と C_3 の交点の x 座標を α とする．$\sin\alpha$, $\cos\alpha$ の値を求めよ．

(3)　C_1, C_2, C_3 によって囲まれる図形の面積を求めよ．

6　α を実数でない複素数とし，β を正の実数とする．以下の問いに答えよ．ただし，複素数 w に対してその共役複素数を $\overline{w}$ で表す．

(1)　複素数平面上で，関係式 $\alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z = |z|^2$ を満たす複素数 z の描く図形を C とする．このとき，C は原点を通る円であることを示せ．

(2)　複素数平面上で，$(z-\alpha)(\beta-\overline{\alpha})$ が純虚数となる複素数 z の描く図形 L とする．L は (1) で定めた C と 2 つの共有点をもつことを示せ．また，その 2 点を P, Q とするとき，線分 PQ の長さを α と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ．

(3)　β の表す複素数平面上の点を R とする．(2) で定めた点 P, Q と点 R を頂点とする三角形が正三角形であるとき，β を α と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ．

7　α, β は異なる 2 つの実数とする．座標平面において 2 点 $(\alpha, 1)$, $(\beta, 1)$ をそれぞれ点 (α^2, α), (β^2, β) に移す 1 次変換を表す行列を A とする．自然数 n に対し，点 $\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$ を

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}\quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

によって定める．

(1)　$Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $AQ = Q\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ となることを示せ．

(2)　数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ の一般項を求めよ．

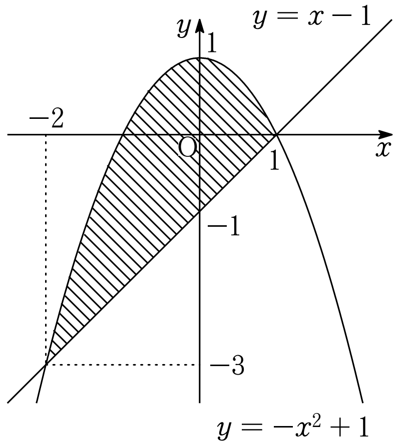
(3)　点 P_2, P_3, P_4, $\cdots\cdots$ がすべて直線 $y = \dfrac{1}{2}x$ 上にあるような α, β を 1 組求め，そのときの行列 A を求めよ．

出題範囲と難易度

1	基本	II	図形と方程式
2	標準	II	三角関数・微分積分
3	標準	B	数列
4	標準	III	微分法の応用
5	基本	III	積分法の応用
6	やや難	III	複素数平面
7	標準	C	行列（旧課程内容）

略解

1 (1)　右図斜線部分で境界線上の点を含む.



(2)　$k \leqq \dfrac{3}{2}$

(3)　$\begin{cases} \text{最大値}:\dfrac{3}{2} & \left(x=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{3}{4}\right) \\ \text{最小値}:-11 & (x=-2,\ y=-3) \end{cases}$

2 (1)　$\mathrm{AQ}=\dfrac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}$,　$\mathrm{QC}=\dfrac{1}{\tan\frac{\beta}{2}}$

(2)　$S=\dfrac{2}{t(1-t^2)}$

(3)　証明は省略

3 (1)　証明は省略

(2)　証明は省略

(3)　$b_n=\begin{cases} a_n & (n\text{ が偶数のとき}) \\ a_n-1 & (n\text{ が奇数のとき}) \end{cases}$

4 (1)　証明は省略

(2)　証明は省略

(3)　証明は省略

(4)　証明は省略

5 (1)　$\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(2)　$\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$,　$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

(3)　$1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

6 (1)　証明は省略

(2)　証明は省略. $\mathrm{PQ}=2\sqrt{\alpha\overline{\alpha}}$

(3)　$\beta=\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}+\sqrt{\alpha^2+10\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}^2}}{2}$

7 (1)　証明は省略

(2)　$x_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$,　$y_n=\dfrac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}$

(3)　$(\alpha,\ \beta)=(2,\ 0)$,　他に $(\alpha,\ \beta)=(0,\ 2)$ でも可

$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$