◀2010 年　筑波大学（前期）▶

1　$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2$ とおく．ただし，$a>0$ とする．

(1)　$f(-1)\leqq f(3)$ となる a の範囲を求めよ．

(2)　$f(x)$ の極小値が $f(-1)$ 以下となる a の範囲を求めよ．

(3)　$-1\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の最小値を a を用いて表せ．

2　3 つの曲線

$$C_1 : y=\sin x \quad \left(0\leqq x<\frac{\pi}{2}\right)$$
$$C_2 : y=\cos x \quad \left(0\leqq x<\frac{\pi}{2}\right)$$
$$C_3 : y=\tan x \quad \left(0\leqq x<\frac{\pi}{2}\right)$$

について以下の問いに答えよ．

(1)　C_1 と C_2 の交点，C_2 と C_3 の交点，C_3 と C_1 の交点のそれぞれについて y 座標を求めよ．

(2)　C_1, C_2, C_3 によって囲まれる図形の面積を求めよ．

3　n を自然数とし，1 から n までの自然数の積を $n!$ で表す．このとき以下の問いに答えよ．

(1)　単調に増加する連続関数 $f(x)$ に対して，不等式 $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx\leqq f(k)$ を示せ．

(2)　不等式 $\displaystyle\int_{1}^{n}\log x\,dx\leqq \log n!$ を示し，不等式 $n^n e^{1-n}\leqq n!$ を導け．

(3)　$x\geqq 0$ に対して，不等式 $x^n e^{1-x}\leqq n!$ を示せ．

4　点 O を原点とする座標平面上に，2 点 A$(1, 0)$, B$(\cos\theta, \sin\theta)$ $(90^\circ<\theta<180^\circ)$ をとり，以下の条件をみたす 2 点 C, D を考える．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1,\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0,\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0,\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=1$$

また，△OAB の面積を S_1，△OCD の面積を S_2 とおく．

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の成分を求めよ．

(2)　$S_2=2S_1$ が成り立つとき，θ と S_1 の値を求めよ．

(3)　$S=4S_1+3S_2$ を最小にする θ と，そのときの S の値を求めよ．

5　a を実数とし，$A=\begin{pmatrix} a+1 & a \\ 3 & a+2 \end{pmatrix}$ とする．2 点 P(x, y), Q(x, y) について

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立つとき，P は A により Q に移るという．

(1)　原点以外の点で，A によりそれ自身に移るものが存在するとき，a を求めよ．

(2)　次の条件 $(*)$ をみたす a, k を求めよ．

$(*)$　直線 $\ell : y=kx+1$ 上のすべての点は，A により ℓ 上の点に移る．

(3)　$(*)$ をみたす a, k に対し，直線 ℓ 上の点で，A によりそれ自身に移るものを求めよ．

6　直線 $\ell : mx+ny=1$ が，楕円 $C : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ に接しながら動くとする．

(1)　点 (m, n) の軌跡は楕円になることを示せ．

(2)　C の焦点 $\mathrm{F}_1(-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ と ℓ との距離を d_1 とし，もう 1 つの焦点 $\mathrm{F}_2(\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ と ℓ との距離を d_2 とする．このとき $d_1d_2 = b^2$ を示せ．

出題範囲と難易度

- **1** 標準　II 微分積分
- **2** 標準　III 積分法の応用
- **3** 標準　III 微分法・積分法
- **4** 標準　B ベクトル（平面）
- **5** 標準　C 行列・1 次変換
- **6** 標準　C いろいろな曲線

略解

1 (1) $0 < a \leqq \dfrac{7}{3}$

(2) $a \geqq 2$

(3)
$$\begin{cases} 0 < a < 2 \text{ のとき} & -\dfrac{1}{2}a - \dfrac{1}{3} \\ 2 \leqq a < 3 \text{ のとき} & -\dfrac{1}{6}a^3 \\ a \geqq 3 \text{ のとき} & -\dfrac{9}{2}a + 9 \end{cases}$$

2 (1)
$$\begin{cases} C_1 \text{ と } C_2 \text{ の交点の } y \text{ 座標} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ C_2 \text{ と } C_3 \text{ の交点の } y \text{ 座標} & \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}} \\ C_3 \text{ と } C_1 \text{ の交点の } y \text{ 座標} & 0 \end{cases}$$

(2) $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \sqrt{2}$

3 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

4 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \left(1,\ -\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$,　$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \left(0,\ \dfrac{1}{\sin\theta}\right)$

(2) $\theta = 135^\circ$,　$S_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

(3) 最小値：$2\sqrt{3}$　$(\theta = 120^\circ)$

5 (1) $a = 0,\ 2$

(2) $a = 2,\ k = \dfrac{3}{2}$

(3) $\left(-\dfrac{2}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$

6 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略