◀1997 年　筑波大学（前期）▶

1　関数 $f(x)=\sin x+\cos x\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ について以下のことを証明せよ.

(1)　方程式 $f(x)=x$ は，ただ 1 つの解をもつ.

(2)　方程式 $f(x)=x$ の解を x_0 とするとき $1<x_0<\sqrt{2}$ が成立する.

(3)　$s,\, t$ が $1 \leqq s<t \leqq \sqrt{2}$ をみたすとき $|f(s)-f(t)| \leqq |f'(\sqrt{2})||s-t|$ が成立する.

(4)　a が $0 \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{2}$ をみたすとき，$a_1=a,\ a_{n+1}=f(a_n)\ (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$ で数列 $\{a_n\}$ を定めると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=x_0$ が成立する.

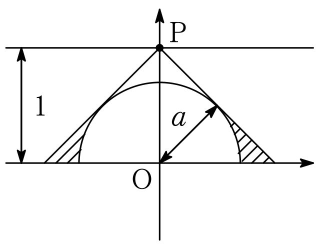
2　関数 $f(x)=\sqrt{e^x-1}\ (x>0)$ について，以下の問いに答えよ.

(1)　曲線 $y=f(x)$ 上を動く点 P がある．点 P における接線の傾きが最小になるときの点 P の x 座標を求めよ.

(2)　曲線 $y=f(x)$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(a,\, f(a)),\ \mathrm{B}(b,\, f(b))$ における接線が平行であるとき，b を a の式で表せ.

(3)　(2) において $b=a+1$ とするとき，a の値を求めよ.

3　右の断面図のように，水平な平面上に半径 $a\ (a<1)$ の半球が，おわんを伏せた形で置かれている．半球の中心 O から真上に 1 だけ離れた点 P にある点光源で半球を照らすとき，光の当たらない陰の部分（ただし，半球の外部で，平面より上）の体積を求めよ.



4　2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ が条件

$$AB=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ (a,\, b) \neq (0,\, 0) \cdots\cdots (*)$$

をみたしている.

(1)　$h(ad-bc)=a$ を示せ.

(2)　A の逆行列が存在することと，B の逆行列が存在しないことを証明せよ.

(3)　$h=0$ とするとき，条件 $(*)$ をみたす $A,\, B$ の例を，具体的な数値を成分に用いて 1 組求めよ.

5　原点 O を中心とする半径 1 の円周 C が xy 平面上にある．この平面上の点 $\mathrm{P}(\mathrm{P} \neq \mathrm{O})$ から x 軸に下ろした垂線の足を Q，直線 OP と C との交点のうち，P に近い方の点を R とする.

(1)　点 P の極座標を $(r,\, \theta)$ として，線分 PQ, PR の長さを，$r,\, \theta$ を用いて表せ.

(2)　2 線分 PQ, PR の長さが等しくなる点 P の軌跡 D の極方程式を求めよ.

(3)　xy 座標に関する D の方程式を求めよ.

6　$a,\, b$ を $a<b$ なる実数とし，次の定積分

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

を近似的に計算することを考える.

(1)　区間 $a \leqq x \leqq b$ を n 等分して S を近似する台形公式を導け（図などを使って具体的に公式を作り出し，

その過程を記せ）.

(2)　右のプログラムは，$f(x) = 1/(1+x^2)$ の場合に，上で求めた公式を使って S の近似値を求めるプログラムである．ただし，$a = 1.0$, $b = 2.0$, $n = 10$ としている．空白行 150〜180 を補ってプログラムを完成せよ．

```
100  DEF FNF(X)=1/(1+X^2)
110  A=1.0:B=2.0
120  N=10
130  H=(B-A)/N
140  S=0
150
160
170
180
190  PRINT S
200  END
```

（注：DEF は，関数を定義する命令である．）

7　ある町から 16 世帯を無作為に選んで所得を調べたところ，度数分布表は次のようになった．

所得（万円）	400	500	600	700	800	900	1000
度数（世帯数）	1	2	3	4	3	2	1

(1)　所得の平均値，中央値，標準偏差および範囲を求めよ．

(2)　上の表で所得 1000 万円の世帯の所得が，実は 1000 万円でなく 9000 万円であったとする．このとき，平均値，中央値，標準偏差および範囲を求めよ．

(3)　(1), (2) をもとに，平均値と中央値のどちらがどのような場合に資料の代表値として適切であるかを 150 字以内で述べよ．

8　xyz 空間において，原点 O および 3 点 $\mathrm{P}(a,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ a,\ 0)$, $\mathrm{R}(0,\ 0,\ a)$ を頂点とする四面体を V とする．ただし $a>0$ とする．平面 $x+y-z=-t$ による V の切り口の面積を $S(t)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$S(t)$ を求めよ．

(2)　$S(t)$ の最大値を求めよ．

出題範囲と難易度

- **1**　標準　III　数列の極限・微分法
- **2**　標準　III　微分法の応用
- **3**　標準　II　微分積分（回転体の体積）
- **4**　標準　C　行列
- **5**　標準　C　極座標
- **6**　基本　C　数値積分法
- **7**　基本　C　確率分布
- **8**　やや難　B　平面の方程式

略解

1 (1)　証明は省略

(2)　証明は省略

(3)　証明は省略

(4)　証明は省略

2 (1)　$x=\log 2$

(2)　$b=a-\log(e^a-1)$

(3)　$a=\log(1+e)-1$

3　$\dfrac{\pi a^6}{3(1-a^2)}$

4 (1)　証明は省略

(2)　証明は省略

(3)　$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

5 (1)　$\mathrm{PQ}=r|\sin\theta|$, $\mathrm{PR}=|r-1|$

(2)　$r=\dfrac{1}{1-\sin\theta}$ と $r=\dfrac{1}{1+\sin\theta}$ ただし，$\theta \fallingdotseq \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3\pi}{2}$ とし，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3\pi}{2}$ では $r=\dfrac{1}{2}$

(3)　$y=\dfrac{x^2-1}{2}$ と $y=\dfrac{1-x^2}{2}$

6 (1)　$S \fallingdotseq \dfrac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{f\left(a+\dfrac{b-a}{n}k\right)+f\left(a+\dfrac{b-a}{n}(k+1)\right)\right\}$　（途中過程は省略）

(2)
```
150  FOR I=1 TO N
160      C=(FNF(A+H*(I-1))+FNF(A+H*I))*H/2
170      S=S+C
180  NEXT I
```

7 (1)

平均値	……	700,	中央値	……	700,
標準偏差	……	158,	範囲	……	$623<m<777$（万円）

(2)

平均値	……	1200,	中央値	……	700,
標準偏差	……	2018,	範囲	……	$215<m<2185$（万円）

(3)　省略

8 (1)

$$S(t)=\begin{cases} 0 & (t \leqq -a,\ a \leqq t) \\ \dfrac{\sqrt{3}}{8}(a^2-2at-3t^2) & (-a<t<0) \\ \dfrac{\sqrt{3}}{8}(a-t)^2 & (0 \leqq t<a) \end{cases}$$

(2)　$\dfrac{\sqrt{3}}{6}a^2\ \left(t=-\dfrac{a}{3}\right)$