◀1996 年　筑波大学（前期）▶

1　a, b を正の定数とし，長さ $a+b$ の線分 AB と，線分 AB を $a:b$ に内分する点 P を考える．線分 AB の端点 A は x 軸上，端点 B は y 軸上を動くものとする．

(1)　点 P の描く曲線の方程式を求めよ．

(2)　この曲線に線分 AB が接するときの点 P の座標を求めよ．

2　行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1+a & b \\ c & 1+d \end{pmatrix}$ を考える．ただし $ad=bc$ とする．

(1)　$A^2=\lambda A$ を満たす数 λ が存在することを示し，λ を a, b, c, d で表せ．

(2)　平面上の任意の点 P をとる．行列 B で表される平面の 1 次変換によって，点 P は点 Q にうつされ，点 Q は点 R にうつされるとする．このとき 3 点 P, Q, R は同一直線上にあることを示せ．

3　k を 0 以上の定数とする．いま関数 $f(x)$ および $g(x)$ を

$$f(x)=x^4+2x^3-3x^2,\ g(x)=(k-4)x^2+kx-\frac{k^2}{4}$$

で定義したとき，方程式 $f(x)-g(x)=0$ は重解 $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ を持っている．

(1)　$\alpha+\beta, \alpha\beta$ を k を用いて表せ．

(2)　2 曲線 $y=f(x), y=g(x)$ で囲まれる部分の面積 S を k を用いて表せ．さらに，S を最小とする k の値と S の最小値を求めよ．

4　a を正の定数とし，$f(x)=\displaystyle\int_0^a(1+xt-x^2)e^{-t}\,dt$ と定義する．

(1)　$f(x)$ を最大にする x の値 x_0 を a を用いて表せ．

(2)　$0<x_0<\dfrac{1}{2}$ となることを示せ．

5　$f(y)$ を $y \geqq 0$ で定義された微分可能な単調増加関数で，$f(0)=0$, $f(1)=\sqrt{2\pi}$ とする．曲線 $x=f(y)$ を y 軸のまわりに回転してできる容器に，時刻 $t\ (t \geqq 0)$ において単位時間あたり e^t の割合（注入速度）で水を注ぐ．時刻 t における水面の高さを $h(t)$，水面の表面積を $s(t)$ とする．ただし $h(0)=0$ である．

(1)　$h'(t)s(t)=e^t\ (t>0)$ を示せ．

(2)　$h(t)s'(t)=e^t\ (t>0)$ が成り立つとき，$h(t)$ と $s(t)$ を求めよ．

6　ある町の住人を任意に 3 人選んで 1, 2, 3 と番号をつけ，それぞれの人の生まれた曜日を調べる．ただし町の人口は十分多く，その中でどの曜日に生まれた人も同じ割合であるとする．3 人のうち少なくとも 2 人が同じ曜日生まれであるという事象を A，1 番の人が日曜日生まれであるという事象を B，また 3 人全員が同じ曜日生まれであるという事象を C とする．

(1)　事象 A の確率を求めよ．

(2)　事象 A と B とは独立であることを示せ．

(3)　事象 C が起こらないことがあらかじめわかったときの事象 A の条件付き確率を求めよ．

出題範囲と難易度

1 標準 代幾 いろいろな曲線

2 標準 代幾 行列・１次変換

3 標準 Ⅰ 高次方程式・基解 微分積分

4 標準 微積 微分法の応用・積分法

5 やや難 微積 積分法の応用

6 標準 確統 確率

略解

1 （1）　$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$

（2）　4 点 $\left(\pm b\sqrt{\dfrac{b}{a+b}},\ \pm a\sqrt{\dfrac{a}{a+b}}\right)$ （複号任意）

注 複号任意とは，上記の 4 つの符号の組合せをすべてとるという意味.

2 （1）　証明は省略，$\lambda=a+d$

（2）　証明は省略

3 （1）　$\alpha+\beta=-1,\quad \alpha\beta=-\dfrac{k}{2}$

（2）　$S=\dfrac{1}{30}(2k+1)^{\frac{5}{2}}$，最小値 ： $\dfrac{1}{30}$ $(k=0)$

4 （1）　$x_0=\dfrac{e^a-a-1}{2(e^a-1)}$

（2）　証明は省略

5 （1）　証明は省略

（2）　$h(t)=\dfrac{1}{\pi}\sqrt{e^t-1},\quad s(t)=2\pi\sqrt{e^t-1}$

6 （1）　$\dfrac{19}{49}$

（2）　証明は省略

（3）　$\dfrac{3}{8}$