◀1995 年　筑波大学（前期）▶

1　四角形 ABCD が半径 1 の円に外接している．$\angle \mathrm{A}=2x$, $\angle \mathrm{B}=2y$, $\angle \mathrm{C}=2u$, $\angle \mathrm{D}=2v$ とおく．

（1）四角形 ABCD の面積 S を x, y, u, v を用いて表せ．

（2）$u=v=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，S を最小にする x, y の値と，そのときの S の値を求めよ．

2　次数が 1 以上の x の整式 $g(x)$ が $g(x)=\dfrac{1}{12}g'(x)^2-21$ を満たしている．

（1）$g(x)$ の次数を求めよ．

（2）定積分 $\displaystyle\int_0^6 g(x)\,dx$ の値を最小にする $g(x)$ を求めよ．

3　a, b, c, d, t は実数で，$a+d=t+t^{-1}$, $ad-bc=1$, $t \fallingdotseq 0, \pm 1$ とする．このとき，すべての自然数 n に対し，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} ap_n-p_{n-1} & bp_n \\ cp_n & dp_n-p_{n-1} \end{pmatrix}$$

となることを示せ．ただし，$p_0=0$, $p_n=\dfrac{t^n-t^{-n}}{t-t^{-1}}$ とする．

4　$y=\log x$ のグラフを C とする．原点からの距離が最小になる C 上の点の x 座標は，$e^{-\frac{1}{2}}$ と $e^{-\frac{1}{3}}$ の間にあることを示せ．ただし，e は自然対数の底で，$e=2.718$ とする．

5　関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ に対し，関数 $g(x)$ を $g(x)=2f(x)+f\left(\dfrac{1-x^2}{2x}\right)$ とおく．

（1）$g(1)$, $g(-1)$ の値を求めよ．

（2）$y=g(x)$ $(0<x)$ および $y=g(x)$ $(x<0)$ のグラフをかけ．

出題範囲と難易度

1　標準　基解　三角関数

2　標準　基解　微分積分

3　標準　代幾　行列

4　標準　微積　微分法の応用

5　標準　微積　微分法の応用・積分法の応用

略解

1 (1) $S=\dfrac{1}{\tan x}+\dfrac{1}{\tan y}+\dfrac{1}{\tan u}+\dfrac{1}{\tan v}$

(2) $S=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\ \left(x=y=\dfrac{\pi}{6}\right)$

2 (1) $n=2$

(2) $g(x)=3x^2-18x+6$

3 証明は省略

4 証明は省略

5 (1) $g(1)=\dfrac{\pi}{2},\ g(-1)=-\dfrac{\pi}{2}$

(2)