

## ◀2015年 東京工業大学(前期)▶

**1** 数列  $\{a_n\}$  を

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める. また数列  $\{b_n\}$  を

$$b_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{1 + 2 + \dots + n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定める.

- (1) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ.
- (2) すべての  $n$  に対して, 不等式  $b_n \leq 3 + \frac{4}{n+1}$  が成り立つことを示せ.
- (3) 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  を求めよ.

**2** 四面体  $OABC$  において,  $OA = OB = OC = BC = 1$ ,  $AB = AC = x$  とする. 頂点  $O$  から平面  $ABC$  に垂線を下ろし, 平面  $ABC$  との交点を  $H$  とする. 頂点  $A$  から平面  $OBC$  に垂線を下ろし, 平面  $OBC$  との交点を  $H'$  とする.

- (1)  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$  とし,  $\vec{OH} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c}$ ,  $\vec{OH}' = s\vec{b} + t\vec{c}$  と表す. このとき,  $p, q, r$  および  $s, t$  を  $x$  の式で表せ.
- (2) 四面体  $OABC$  の体積  $V$  を  $x$  の式で表せ. また,  $x$  が変化するときの  $V$  の最大値を求めよ.

**3**  $a > 0$  とする. 曲線  $y = e^{-x^2}$  と  $x$  軸,  $y$  軸, および直線  $x = a$  で囲まれた図形を,  $y$  軸のまわりに 1 回転してできる回転体を  $A$  とする.

- (1)  $A$  の体積  $V$  を求めよ.
- (2) 点  $(t, 0)$  ( $-a \leq t \leq a$ ) を通り  $x$  軸と垂直な平面による  $A$  の切り口の面積を  $S(t)$  とするとき, 不等式

$$S(t) \leq \int_{-a}^a e^{-(s^2+t^2)} ds$$

を示せ.

- (3) 不等式

$$\sqrt{\pi(1 - e^{-a^2})} \leq \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$$

を示せ.

**4**  $xy$  平面上を運動する点  $P$  の時刻  $t$  ( $t > 0$ ) における座標  $(x, y)$  が

$$x = t^2 \cos t, \quad y = t^2 \sin t$$

で表されている. 原点を  $O$  とし, 時刻  $t$  における  $P$  の速度ベクトルを  $\vec{v}$  とする.

- (1)  $\vec{OP}$  と  $\vec{v}$  のなす角を  $\theta(t)$  とするとき, 極限值  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t)$  を求めよ.
- (2)  $\vec{v}$  が  $y$  軸に平行になるような  $t$  ( $t > 0$ ) のうち, 最も小さいものを  $t_1$ , 次に小さいものを  $t_2$  とする. このとき, 不等式  $t_2 - t_1 < \pi$  を示せ.

**5**  $n$  を相異なる素数  $p_1, p_2, \dots, p_k$  ( $k \geq 1$ ) の積とする.  $a, b$  を  $n$  の約数とすると,  $a, b$  の最大公約数を  $G$ , 最小公倍数を  $L$  とし,

$$f(a, b) = \frac{L}{G}$$

とする.

- (1)  $f(a, b)$  が  $n$  の約数であることを示せ .
- (2)  $f(a, b) = b$  ならば ,  $a = 1$  であることを示せ .
- (3)  $m$  を自然数とするとき ,  $m$  の約数であるような素数の個数を  $S(m)$  とする .

$$S(f(a, b)) + S(a) + S(b)$$

が偶数であることを示せ .

### 出題範囲と難易度

- ❶ 難 III 数列の極限
- ❷ 標準 B ベクトル(空間)
- ❸ 難 III 積分法の応用
- ❹ 標準 III 微分法の応用
- ❺ 標準 A 整数問題

**略解**

**1** (1)  $a_n = \frac{6n-1}{2n-1}$

(2) 証明は省略

(3) 3

**2** (1)  $p = \frac{2x^2-1}{4x^2-1}, q = r = \frac{x^2}{4x^2-1}, s = t = \frac{2-x^2}{3}$

(2)  $V = \frac{1}{12} \sqrt{-x^4 + 4x^2 - 1}$

最大値:  $\frac{\sqrt{3}}{12}$  ( $x = \sqrt{2}$ )

**3** (1)  $V = \pi(1 - e^{-a^2})$

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

**4** (1)  $\frac{\pi}{2}$

(2) 証明は省略

**5** (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略