◀2012 年　東京工業大学（前期）▶

1

（1） 辺の長さが 1 である正四面体 OABC において辺 AB の中点を D，辺 OC の中点を E とする．2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を求めよ．

（2） 1 から 6 までの目がそれぞれ $\dfrac{1}{6}$ の確率で出るさいころを同時に 3 個投げるとき，目の積が 10 の倍数になる確率を求めよ．

2

（1） $\log_{10} 3 = 0.4771$ として，$\sum_{n=0}^{99} 3^n$ の桁数を求めよ．

（2） 実数 a に対して，a を超えない最大の整数を $[\,a\,]$ で表す．10000 以下の正の整数 n で $[\,\sqrt{n}\,]$ が n の約数となるものは何個あるか．

3 3 次関数 $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ のグラフを C，直線 $y = ax$ を ℓ とする．

（1） C と ℓ が原点以外の共有点をもつような実数 a の範囲を求めよ．

（2） a が (1) で求めた範囲内にあるとき，C と ℓ によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする．$S(a)$ が最小となる a の値を求めよ．

4 n を正の整数とする．数列 $\{a_k\}$ を

$$a_1 = \frac{1}{n(n+1)},\quad a_{k+1} = -\frac{1}{k+n+1} + \frac{n}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める．

（1） a_2 および a_3 を求めよ．

（2） 一般項 a_k を求めよ．

（3） $b_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}$ とおくとき，$\lim_{n\to\infty} b_n = \log 2$ を示せ．

5 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で定まる 1 次変換を f とする．原点 O(0, 0) と異なる任意の 2 点 P, Q に対して $\dfrac{\mathrm{OP}'}{\mathrm{OP}} = \dfrac{\mathrm{OQ}'}{\mathrm{OQ}}$ が成り立つ．ただし，P′, Q′ はそれぞれ P, Q の f による像を表す．

（1） $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ を示せ．

（2） 1 次変換 f により，点 $(1, \sqrt{3})$ が点 $(-4, 0)$ に移るとき，A を求めよ．

6 xyz 空間に 4 点 P(0, 0, 2), A(0, 2, 0), B($\sqrt{3}$, −1, 0), C($-\sqrt{3}$, −1, 0) をとる．四面体 PABC の $x^2 + y^2 \geqq 1$ をみたす部分の体積を求めよ．

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

出題範囲と難易度

1 基本　A 確率・B ベクトル（空間）

2 標準　I 整数問題・II 対数関数・B 数列

3 やや難　III 微分法の応用・積分法の応用

4 標準　B 数列・III 積分法の応用

5 標準　C １次変換

6 やや難　III 積分法の応用

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto

略解

1
（1）$\dfrac{1}{2}$

（2）$\dfrac{1}{3}$

2
（1）48

（2）298

3
（1）$a \geqq -\dfrac{1}{4}$

（2）$38-27\sqrt{2}$

4
（1）$a_2=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$，　$a_3=\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}$

（2）$a_k=\dfrac{1}{n+k-1}-\dfrac{1}{n+k}$

（3）証明は省略

5
（1）証明は省略

（2）$A=\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \mp\sqrt{3} & \pm 1 \end{pmatrix}$（複号同順）

6
$4\sqrt{3}-2\pi$