◀2010 年　東京工業大学（前期）▶

1　$f(x)=1-\cos x-x\sin x$ とする．

(1)　$0<x<\pi$ において，$f(x)=0$ は唯一の解を持つことを示せ．

(2)　$J=\int_0^{\pi}|f(x)|\,dx$ とする．(1) の唯一の解を α とするとき，J を $\sin\alpha$ の式で表せ．

(3)　(2) で定義された J と $\sqrt{2}$ の大小を比較せよ．

2　a を正の整数とする．正の実数 x についての方程式

$$(*)\qquad x=\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)\right]$$

が解を持たないような a を小さい順に並べたものを $a_1, a_2, a_3, \cdots$ とする．ここに [ ] はガウス記号で，実数 u に対し，$[u]$ は u 以下の最大の整数を表す．

(1)　$a=7, 8, 9$ の各々について (*) の解があるかどうかを判定し，ある場合は解 x を求めよ．

(2)　a_1, a_2 を求めよ．

(3)　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ を求めよ．

3　1 から n までの数字がもれなく一つずつ書かれた n 枚のカードの束から同時に 2 枚のカードを引く．このとき，引いたカードの数字のうち小さい方が 3 の倍数である確率を $p(n)$ とする．

(1)　$p(8)$ を求めよ．

(2)　正の整数 k に対し，$p(3k+2)$ を k で表せ．

4　a を正の定数とする．原点を O とする座標平面上に定点 $\mathrm{A}=\mathrm{A}(a,\,0)$ と，A と異なる動点 $\mathrm{P}=\mathrm{P}(x,\,y)$ をとる．次の条件

A から P に向けた半直線上の点 Q に対し $\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AP}}\leqq 2$ ならば $\frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{OQ}}\leqq\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{OA}}$

を満たす P からなる領域を D とする．D を図示せよ．

出題範囲と難易度

1　標準　$\boxed{\text{III}}$ 微分法の応用・積分法

2　やや難　$\boxed{\text{I}}$ 整数問題・$\boxed{\text{III}}$ 数列の極限

3　標準　$\boxed{\text{A}}$ 確率

4　やや難　$\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式

略解

1 (1) 証明は省略

(2) $J = 2\sin\alpha$

(3) $J > \sqrt{2}$

2 (1)
$$\begin{cases} a = 7 \text{ のとき} \quad x = 2 \\ a = 8 \text{ のとき} \quad \text{解なし} \\ a = 9 \text{ のとき} \quad x = 3 \end{cases}$$

(2) $a_1 = 3, \quad a_2 = 8$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{3}{4}$

3 (1) $p(8) = \dfrac{1}{4}$

(2) $p(3k+2) = \dfrac{k}{3k+2}$

4 右図斜線部分で，境界は原点と点 $(a, 0)$ のみ含まない．