◀2008 年　東京工業大学（前期）▶

1　正の実数 a, b に対し，$x>0$ で定義された 2 つの関数 x^a と $\log bx$ のグラフが 1 点で接するとする．

(1)　接点の座標 (s, t) を a を用いて表せ．また，b を a の関数として表せ．

(2)　$0<h<s$ をみたす h に対し，直線 $x=h$ および 2 つの曲線 $y=x^a$, $y=\log bx$ で囲まれる領域の面積を $A(h)$ とする．$\displaystyle\lim_{h\to 0} A(h)$ を a で表せ．

2　実数 x に対し，x 以上の最小の整数を $f(x)$ とする．a, b を正の実数とするとき，極限

$$\lim_{x\to\infty} x^c\left(\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(bx+3)}\right)$$

が収束するような実数 c の最大値と，そのときの極限値を求めよ．

3　いびつなサイコロがあり，1 から 6 までのそれぞれの目が出る確率が $\dfrac{1}{6}$ とは限らないとする．このサイコロを 2 回ふったとき同じ目が出る確率を P とし，1 回目に奇数，2 回目に偶数の目が出る確率を Q とする．

(1)　$P \geqq \dfrac{1}{6}$ であることを示せ．また，等号が成立するための必要十分条件を求めよ．

(2)　$\dfrac{1}{4} \geqq Q \geqq \dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}P$ であることを示せ．

4　平面の原点 O を端点とし，x 軸となす角がそれぞれ $-\alpha, \alpha$ $\left(ただし\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}\right)$ である半直線を L_1, L_2 とする．L_1 上に点 P, L_2 上に点 Q を線分 PQ の長さが 1 となるようにとり，点 R を，直線 PQ に対し原点 O の反対側に △PQR が正三角形になるようにとる．

(1)　線分 PQ が x 軸と直交するとき，点 R の座標を求めよ．

(2)　2 点 P, Q が，線分 PQ の長さを 1 に保ったまま L_1, L_2 上を動くとき，点 R の軌跡はある楕円の一部であることを示せ．

出題範囲と難易度

1　標準　III 積分法の応用

2　やや難　III 関数の極限

3　やや難　A 確率・II 不等式の証明

4　やや難　C いろいろな曲線

略解

1 (1)　$(s,\ t)=\left(\dfrac{1}{a^{\frac{1}{a}}},\ \dfrac{1}{a}\right)$,　$b=(ea)^{\frac{1}{a}}$

(2)　$\displaystyle\lim_{h\to 0}A(h)=\frac{a^{1-\frac{1}{a}}}{a+1}$

2
$$\begin{cases} a \fallingdotseq b \text{ のとき} & c \text{ の最大値：} c=1,\quad \text{極限値：} \dfrac{b-a}{ab} \\ a=b \text{ のとき} & c \text{ の最大値：} c=2,\quad \text{極限値：} \dfrac{10}{a^2} \end{cases}$$

3 (1)　証明は省略.

等号が成り立つための必要十分条件は，1 から 6 までのそれぞれの目の出る確率が $\dfrac{1}{6}$ のとき.

(2)　証明は省略

4 (1)　$\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{2\tan\alpha}+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$

(2)　証明は省略.　$\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\tan\alpha}{2\tan\alpha}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{3}-\tan\alpha}{2}\right)^2}=1$